

УДК 519.95+300.351

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СОЦИАЛЬНЫХ СТРУКТУР

© В.В. Хлебников

Ключевые слова: математическое моделирование; синергетика; клеточные автоматы.

В работе рассматривается обзор различных математических моделей эволюции пространственных социальных структур и реализована модель эволюция населения на примере России XIII века.

В современном мире возрастает сложность форм социальной организации, увеличиваются неопределенности и риски, в т. ч. и риски соскальзывания на катастрофические сценарии развертывания исторических событий. Неустойчивость глобального развития человеческого сообщества усиливается, причем это происходит на фоне резкого увеличения темпов исторических изменений. Мир, особенно на протяжении XX в., претерпел сильные изменения и продолжает стремительно меняться. Со всей остротой встали глобальные проблемы, и человечество в целом вошло в зону сильнейшего глобального системного кризиса, который грозит обернуться каскадом катастроф невиданного масштаба.

Управление будущим стало научной проблемой. Будущее надо тщательно просчитывать, моделировать, конструировать. Без разработки глобальной стратегии невозможно предотвратить изменение климата, обеспечить устойчивое развитие общества в экономическом и политическом аспектах.

Однако для выработки глобальной стратегии необходимо исследование эволюции человечества на протяжении всей его истории, выявление векторов его развития в прошлом и невероятно сложном настоящем. Необходимо получить ответ на вопрос о том, существуют ли объективные законы эволюции глобальных структур мира, и если да, то можно ли влиять на ход исторического развития, направляя траекторию в желаемое русло?

Многие ученые, начиная с древних философов, ставили своей целью выявление закономерностей эволюции человечества за сложным сплетением исторических событий. Однако многогранность человеческого бытия в социуме, влияние ценностей и идеологий являются причиной неоднозначного толкования истории, разногласий в оценке настоящей исторической ситуации, существования как пессимистичных, так и оптимистичных взглядов на будущее человечества.

В XX в. многочисленные попытки построить универсальное системное видение природы и общества в виде кибернетики, различных версий общей теории систем вылились в итоге в 1960-х гг. в формирование мощного междисциплинарного движения – синергетики. Синергетика, опираясь на результаты математического моделирования, выявляет закономерности эво-

люции и самоорганизации в открытых нелинейных системах. С развитием синергетики стало очевидным, что, только поднявшись на глобальный уровень и рассматривая все человечество как единую самоорганизующуюся и саморазвивающуюся сложную систему, можно исследовать эволюцию мирового сообщества.

Примером глубокого исследования синергетики глобальных исторических процессов может служить математическая теория, разработанная С.П. Капицей [1, 2]. Рассматривая население мира как единую систему, развитие которой подчиняется в большей степени собственным внутренним законам, чем внешним факторам, он дал всесторонний анализ эволюции человеческого общества, начиная с начала его зарождения примерно 4,5 млн лет тому назад. Как и принято в синергетике, он выбрал главный параметр порядка, оказавший наибольшее влияние на ход развития, и проследил за его эволюцией. В качестве такового им была взята общая численность населения Земли  $N$  – ведущая медленная переменная, к которой подстраиваются все остальные переменные. Тем самым С.П. Капица провозгласил принцип демографического императива: именно демография, рост народонаселения Земли, обуславливает характер социальных, экономических и геополитических процессов, происходящих в глобальной системе человечества. Все остальные параметры и процессы, такие, как распределение людей в пространстве, возрастные, расовые и имущественные различия, в модели усредняются и учитываются в общем взаимодействии. Его феноменологическая макроскопическая модель – благодаря сцеплению численности людей с уровнем исторического развития и с течением исторического времени – не только дает количественное описание исторических процессов, но и восстанавливает достаточно полную объективную картину эволюции реального мира.

В исторической науке системный подход зародился в середине прошлого века и связан, в первую очередь, с именами таких историков и социологов, как Ф. Бродель, А. Франк, И. Валлерстайн, С.И. Гринина, А.В. Коротаева, С.Ю. Малкова [3], А.П. Назаретяна [4]. История представляется не как совокупность историй отдельных народов и государств, а как необратимая социальная эволюция мирового сообщества, связанная прежде всего с возникновением крупнейших иннова-

ций, оказавших влияние на ход исторического процесса в целом, и со структурными трансформациями единой, как ее называют историки, Мир – Системы.

Историки предполагают, что Мир – Система зародилась на Ближнем Востоке в конце эпохи неолита примерно в X тыс. до н. э. Сначала от Балкан вплоть до долины Инда, а к концу I тыс. до н. э. от Атлантики до Тихого океана сложился целый пояс культур, основанных на сельском хозяйстве и находящихся на сходном уровне сложности, который включал в себя основную часть населения мира. Мир – Система стала функционировать и развиваться. Составлявшие ее народы, несмотря на кажущуюся разобщенность и независимость развития в те времена, взаимодействовали друг с другом, перенимали друг у друга новшества, знания, умения и технологии.

Именно накопление информации, ее приумножение от поколения к поколению и распространение по всей территории обитания человека благодаря языку и развитому интеллекту связало человечество воедино и стало основой его эволюции. Даже тогда, когда население Земли представляли отдельные малочисленные племена, сильно разбросанные по огромной территории, все равно они взаимодействовали. Именно системные взаимодействия привели к глобальной синхронизации в истории человечества, что отражается в глобальной согласованности смены эпох и фаз в развитии человечества даже в те далекие времена. Распространение и общность различных языков, зарождение и распространение мировых религий в исторически короткое время является ярким свидетельством системных взаимодействий.

Главным продуктом функционирования Мир – Системы явилось создание человечеством собственной развивающейся антропогенной среды и собственного развивающегося мира – экономической и социокультурной надстроек. Разорвалась непосредственная связь человека и природы. В процессе своего развития человек становился все менее зависимым от природных условий и бедствий. И следствием этого стал ускоряющийся прирост населения Земли, сначала очень медленный, а затем все более и более быстрый.

Исследования, проведенные в 1960-х гг. группой Х. фон Фёрстера, показали, что численность человечества возрастала по гиперболическому закону, или в режиме с обострением, который на заключительном этапе представляет собой взрыв. Действительно, в последние двести лет наблюдалось особенно резкое увеличение численности населения Земли, которое было охарактеризовано, как демографический взрыв. Небывалые успехи медицины привели к стремительному снижению смертности и росту продолжительности жизни во всем мире, а это в свою очередь привело к беспрецедентному росту населения планеты. Население планеты, которое в 1800 г. не достигало еще 1 млрд человек, к 1900 г. выросло до 1650 млн, а к концу 1999 г. достигло 6 млрд. Сегодня, в 2009 г., по данным ООН численность населения Земли составляет около 6,7 млрд человек.

В режиме с обострением, при котором функция асимптотически уходит в бесконечность за конечное время, развивалась и экономика. Главной движущей силой социально-экономической эволюции была положительная обратная связь между численностью людей

и уровнем развития знаний, технологий и накоплением информации [5]. Именно эта связь обеспечила гиперболический характер роста как общей численности населения, так и ряда экономических показателей, характеризующих уровень развития антропогенной среды, например мировой валовой продукт.

Для осуществления своей деятельности человечество объединялось в различные социально-экономические группы, создавая структуры. Каждой исторической эпохе соответствовала своя структура расселения, размещения и хозяйствования. В этом смысле все развитие человеческого общества отразилось, как в зеркале, в эволюции пространственных структур, городов, государств, империй, геополитических и экономических сообществ и т. д. Изучение особенностей их формирования, развития и взаимодействия, ведущего как к распаду, так и к объединению, позволило выявить и понять объективные закономерности движения истории.

В XVI в. человечество вступило в планетарную эру. С того времени, когда молодые и немногочисленные народы Европы устремились на освоение и завоевание земного шара, начинается чудовищное переселение народов, ускоряется демографический рост, начинается экономический подъем, возникает необходимость в развитии сетей коммуникации, которые охватят впоследствии весь мир. Во второй половине XX в. наступает новая стадия планетарной эры – стадия глобализации. Мощное развитие мирового рынка, денежных и миграционных потоков, разветвленных транспортных сетей и систем связи, в т. ч. прессы, радио, телевидения, Интернета, приводят к тому, что сегодня каждый житель планеты ежедневно и ежечасно ощущает свою интеграцию в мировое сообщество, свою причастность событиям в своей стране и в мире в целом.

Демографический взрыв сопровождался огромным ростом сельскохозяйственного и промышленного производства в мировых масштабах, истреблением флоры, фауны, извлечением невозполнимых запасов полезных ископаемых, загрязнением окружающей среды. Давление человечества на природу приблизилось к предельно допустимым отметкам, оно стало влиять на биосферу. Человечество впервые в истории столкнулось с глобальными опасностями и угрозами, так что разные народы были вынуждены прийти к осознанию своей единой планетарной судьбы. Комплекс глобальных проблем потребовал создания ряда крупных международных организаций и еще невиданного в истории международного сотрудничества.

Но главным глобальным процессом, начавшимся в середине XX в., протекающим сейчас и остающимся до сих пор незамеченным для большинства ответственных представителей общества, является глобальный демографический переход. Демографический переход – это глобальная революция в истории человечества, или, говоря математическим языком, бифуркация, связанная с коренным изменением воспроизводства человеческого общества, при которой темпы прироста общей численности людей падают, а сама численность стремится к постоянному значению. До этого все развитие человеческого общества основывалось на растущей численности людей. Демографический переход с неизбежностью приводит к глобальным структурным геополити-

ческим и экономическим изменениям в мировой системе, смене всей конфигурации взаимоотношений.

В развитых странах Европы и США демографический переход начался еще в XVIII в. и в настоящее время уже полностью завершен; к середине XX в. демографический переход стал феноменом, охватившим всю планету; многим странам Азии и Латинской Америки (Китаю, Индии, Пакистану, Индонезии, Бразилии и т. п.) с интенсивно растущей численностью населения еще предстоит завершить этот исторический этап в XXI в. Темпы прироста в этих странах падают. Теперь переход происходит в 2 раза быстрее и охватывает в 10 раз больше людей, чем в Европе. По среднему прогнозу ООН в ближайшем будущем до 2150 г. население Земли выйдет на постоянный предел в 9 млрд людей.

Исследование глобальных процессов развития мирового сообщества, опирающееся на результаты математического моделирования, позволяет выделить несколько качественно различных этапов в развитии человеческого общества, выявить главные закономерности эволюции и на их основе построить возможные сценарии будущего развития. В частности, удастся объяснить устойчивость гиперболического роста суммарной численности населения Земли, несмотря на войны, природные катаклизмы и эпидемии, усиление неустойчивости развития мирового сообщества в целом, а также две противоположные тенденции, наблюдаемые в истории человечества: стремление к объединению, с одной стороны, и распад существовавших в истории империй, стремление к национальному и этническому самоопределению – с другой.

Показано, в частности, что бурный рост населения и научно-техническая революция, произошедшие в прошлом веке, являются проявлением последней стадии взрывного развития мировой системы, которая сопровождается следующими явлениями: сильнейшим расслоением общества, неравномерностью развития отдельных территорий и усилением диспропорций между ними, разрывом в развитии между отдельными странами и территориями, усилением влияния все более мелких возмущений, возрастанием неустойчивости развития и распадом сложных структур и т. д. Кроме того, показано, что доля стран, городов, территорий, отдельных технологических и научных центров, доля людей, определяющих динамику мирового развития, сосредоточивших в своих руках основные капиталы и участвующих в дележе мирового продукта, уменьшается; расслоение общества продолжает расти. Все это может быть охарактеризовано как коллапс цивилизации – схлопывающаяся к центру волна развития, из которой выпадают все большее число стран, территорий и центров.

Необходимость решения глобальных проблем заставляет людей объединяться во всевозможные организации и союзы для выработки единых норм жизни и обеспечения глобальной безопасности. Глобальные проблемы – экономические, экологические, социальные, политические – все сильнее связывают распадающееся человеческое общество воедино; концентрация и централизация в управлении усиливается. Все ведет к формированию единого управляющего центра, стремящегося организовать тотальный контроль над каждой территорией, над каждым человеком. В этом выражается сущность происходящей ныне самой ради-

кальной бифуркации в глобальной эволюции человечества перехода к новому мироустройству.

В настоящее время в моделировании социальных процессов уже довольно широко применяются традиционные математические методы, такие как, например, выражение динамики процесса через дифференциальные уравнения с последующим их аналитическим либо численным решением [6]. Однако стоит причислить к перспективным направлениям решения проблемы математического описания социальных явлений использование также и нетрадиционных подходов к построению математических моделей.

К числу таких подходов, в частности, относятся модели на основе клеточных автоматов – дискретных динамических систем, поведение которых полностью определяется локальными в пространстве и времени зависимостями.

Свою популярность и известность клеточный автомат заслужил благодаря игре «Жизнь», которую придумал в 1970 г. английский математик Джон Конвей [7]. Данная игра описывает рождение и смерть простейших «одноклеточных» организмов, образующих в совокупности порой довольно причудливые «организмы» с довольно сложным поведением, несмотря на очень простые правила:

- клетка может быть только живой или мертвой;
- если клетка мертва в момент времени  $t$ , то она оживает в момент  $(t+1)$  тогда и только тогда, когда трое из ее соседей были живы в момент  $t$ ;
- если клетка была жива в момент  $t$ , то она погибает в момент  $(t+1)$  тогда и только тогда, когда меньше чем две, или больше чем три соседние клетки были живы в момент  $t$ .

Физическое пространство в таких моделях представлено равномерной сеткой. Ячейка пространственной сетки носит название клетки, а сама сетка называется полем клеточного автомата.

Соседями данной клетки называются поля, расположенные рядом с ней, причем понятие «рядом» определяется для каждого конкретного клеточного автомата по-своему. Набор соседей и их расположение относительно данной клетки образуют окрестность, рассматриваемую в модели. Например, в случае ортогональной двумерной сетки мы можем назвать соседями четыре клетки, имеющие с данной общую сторону (окрестность фон Неймана) или добавить к ним еще четыре, лежащие по диагонали (окрестность Мура).

Каждая клетка содержит некоторое (одинаковое для всех клеток) количество битов информации. Совокупность значений этих битов называется состоянием клетки.

Время в этих системах дискретно, шаг по времени не меняется. На каждом шаге состояние клетки изменяется в зависимости от состояния ее соседей. Законы этого изменения называются правилами клеточного автомата. Они одинаковы для всех клеток. Если в этих законах фигурирует одна или несколько случайных величин, то клеточный автомат называется вероятностным, или стохастическим, в противоположность детерминированному, для которого состояние на следующем шаге полностью определяется состоянием на предыдущем.

На практике, однако, однородность модели нарушается необходимостью задать границы поля клеточ-

ного автомата и, соответственно, особые правила для пограничных клеток. Этот вопрос решается в каждом конкретном случае. В частности, для двумерной ортогональной сетки можно вообще отказаться от границ, замкнув ее в тор.

То, что состояние клетки определяется исключительно состоянием ее соседей и ее самой, составляет важнейшее свойство клеточных автоматов – локальность.

Однако в некоторых случаях при построении моделей этого класса оказывается целесообразным ввести в правила зависимость состояния клетки от клеток, не являющихся ее соседями, или от состояния соседей на предыдущих временных шагах. В этом случае клетки, влияющие на состояние данной и не являющиеся ее соседями, называют псевдососедями. Очевидно, что чем шире класс псевдососедей в модели, тем слабее выражена ее локальность.

Было доказано, что любой клеточный автомат можно свести к универсальному клеточному автомату, имеющему восемь состояний клетки и окрестность Мура.

В 60-е гг. Дж. Голланд использовал клеточные автоматы для решения задач оптимизации, для чего создал программный имитатор дискретных моделей – прообраз машин клеточных автоматов. Один из их будущих создателей – Томмасо Тоффоли – начинал свои исследования клеточных автоматов, работая с этим имитатором.

Наиболее известным примером клеточного автомата является игра «Жизнь» Дж. Конвея. При исследованиях эволюции игры «Жизнь» выявились некоторые нетривиальные закономерности.

1) Случайное начальное распределение живых клеток всегда приводит к стационарному распределению клеток автомата.

2) После изменения состояния одной клетки в стационарном распределении система возвращается к стационарному состоянию.

3) Время  $T$  возвращения автомата к стационарному распределению и суммарная активность  $A$  (общее число «рождений» и «смертей») за это время подчиняются вероятностным закономерностям со следующим распределением плотности вероятности:  $\rho(T) \propto T^{-d}$  ;

$$\rho(A) \propto A^{-\gamma} .$$

Равновесное состояние, обладающее свойствами, заданными распределениями вероятностей, называют критическим, а поскольку в игре «Жизнь» оно возникает из случайного начального распределения, говорят, что этот клеточный автомат обладает самоорганизованной критичностью.

Кроме того, оказывается, что с помощью клеточного автомата можно имитировать сколь угодно сложные процессы. Было доказано, что этот клеточный автомат эквивалентен универсальной вычислительной машине Тьюринга.

Интересно также то, что игра «Жизнь» представляет собой мир, где будущее детерминировано, но «узнать» его можно лишь «дожив» до него и проделав все промежуточные шаги.

Таким образом, клеточные автоматы – это простые системы, обладающие в то же время сложной динамикой,

что делает их хорошим инструментом математического моделирования.

Важной особенностью моделирования при помощи клеточных автоматов является то, что при таком моделировании сталкиваются с задачей, прямо противоположной обычному математическому описанию физической реальности. Если классическая термодинамика, например, усредняет зависимости микроскопических величин с тем, чтобы получить для них макроскопические уравнения, то при построении моделей класса клеточных автоматов, наоборот, стоит обратная задача, заключающаяся в выборе модели, микродинамика которой дает при усреднении нужную макродинамику. При этом совершенно необязательным является полное соответствие микродинамики модели и моделируемого явления.

Впоследствии Тоффоли и Фредкин поставили вопрос об использовании клеточных автоматов для моделирования непосредственно физических законов и явлений, а не только общих аспектов мира, таких как рост, конкуренция, эволюция, воспроизведение и т. д.

Для выполнения этой задачи модель должна сохранять информацию в процессе своей эволюции, т. е. быть обратимой. Обратимость клеточных автоматов и применимость их в математическом моделировании физических явлений была исследована Фредкином, Марголусом и Тоффоли.

Беннет и Гринштейн, в свою очередь, рассмотрели вопросы, связанные с возможностью физического моделирования при помощи необратимых дискретных систем, главным образом представлявших собой клеточные автоматы. Было показано, что они могут быть применены для моделирования диссипативных и прочих необратимых процессов.

Отличительной особенностью клеточных автоматов является простота правил и однородность моделей, которые позволяют реализовывать на компьютерах с высокой степенью параллельности процессоров, дающих возможность одновременно обновлять состояния миллионов клеток.

В последние годы клеточные автоматы были использованы для моделирования таких разнообразных явлений, как генетический дрейф, нарушение сердечных ритмов, пробки на автотрассах и хаос.

На этом пути были получены предельно простые модели явлений, описываемых такими дифференциальными уравнениями, как волновое уравнение, уравнение теплопроводности и уравнение Навье – Стокса.

Естественно, что такой широкий спектр использования клеточных автоматов не мог не включить в себя и вопросы описания явлений, которые могут быть отнесены к области социального знания.

В целом следует отметить, что клеточные автоматы применялись для моделирования в самых разных областях знания, однако использование их в качестве моделей социальных процессов пока не получило широкого распространения и здесь выполняются лишь первые шаги в основном в смежных областях [8].

Это означает, с одной стороны, большие перспективы и практически неограниченный простор для возможных исследований в этом направлении.

С другой стороны, массовый приход традиционной математической формализации в отдельные сферы социального знания может привести к тому, что кле-

точные автоматы и в приложении к гуманитарным дисциплинам останутся нетрадиционным, альтернативным подходом.

Итак, целью данной работы является реализация имитационной модели динамики образования пространственных социальных структур на основе двумерных клеточных автоматов.

Полученная модель представляет собой двумерный клеточный автомат на плоскости. В качестве элементов, из которых строится все здание модели, выбрано поселение. Поселения и возникающие между ними отношения образуют пространственно-социальную структуру, динамику которой и предстоит изучить на основе вводимых правил функционирования поселений. Такие структуры являются прообразом государства, основой для более сложных моделей, поскольку под государством понимается не только территория и население, на ней живущее, а еще и менталитет людей, политика и т. д.

Упростив модель, путем практически полного упрощения государства мы, тем самым, конкретизировали исторические рамки, в которых можно пытаться применять результаты моделирования. Применительно к истории России речь может идти о второй половине первого тысячелетия, когда осуществлялось становление государственности, эпохе доминирования сельского хозяйства. При составлении модели предлагается ограничиться двумя «блоками» (применительно к I–X вв. н. э.), составляющими ее фундамент, а именно: демографией и сельским хозяйством.

Производственной базой создаваемой модели, как это следует из вышесказанного, должно служить сельское хозяйство. Поскольку вид собираемого урожая зависит от типа почв, то в работе предлагается ограничиться небольшим их количеством. Тогда географическая карта разобьется на клетки, каждая из которых может представлять собой только один вид местности: лес, лесостепь, степь и т. д.

Под сельским хозяйством понимается производство продуктов питания, причем производственную функцию можно задать в простом виде: сколько требуется земли данного типа и человек для производства одного килограмма продукции. Такой подход справедлив не только к выращиванию пшеницы, но и к животноводству, просто надо учитывать, что животные питаются зерном, пасутся на траве, но производство этих продуктов и характеризуется указанной функцией. При этом обязательно в модели надо задать необходимый годовой рацион питания одного человека с указанием калорийности каждого вида еды и суммарным значением необходимого числа калорий, которые человек должен «съесть» за год. Введение калорийности пищи необходимо для определения достаточности пропитания, ведь, например, недостаток зерна при избытке мяса не означает голодную смерть.

В качестве производимых типов продукции взято четыре основных – зерно, мясо, фрукты и рыба. Учитывая изначальную ориентированность создаваемой модели на реальный исторический процесс, было принято решение формировать ландшафт из клеток шести типов. Хотя скот и дичь по своим энергетическим показателям примерно совпадают, ниже оба этих типа провизии будут различаться. Причем различие это обусловлено даже не столько ими самими, сколько пове-

дением людей, живущих в лесу и в степи. С формальной точки зрения различие между скотоводством и охотой постулируется производственными функциями. Предполагается, что площадь угодий, необходимая для добычи 1 кг дичи, значительно больше, чем для получения 1 кг мяса.

Анализ особенностей аграрного производства позволяет применить для его описания производственную функцию вида:

$$F(N) = p * R(N) * N, \quad (1)$$

где  $F(N)$  – количество произведенного зерна с единицы посевной площади в год,  $N$  – количество людей, обрабатывающих единицу площади,  $R(N)$  – площадь земли, которую обрабатывает один крестьянин,  $p$  – урожайность территории. Данная функция обладает характерным для аграрного хозяйства насыщением: при  $N \rightarrow \infty$   $F(N) \rightarrow p$ , что, в частности, резко ограничивает численность населения, способного проживать на данной территории [9].

Теория демографических циклов изучает процессы изменения численности населения в условиях ограниченности природных ресурсов. Ранее было показано наличие демографических циклов в развитии многих географических регионов и схожие модели их течения. В условиях изобилия ресурсов при высоком потреблении население региона быстро растет. Затем рост замедляется, стабилизируясь вблизи асимптоты, соответствующей уровню минимального биологического потребления. Сложившееся состояние является неустойчивым: рост социального напряжения, приводящий к смутам, восстаниям и войнам, всеобщий голод и массовые эпидемии становятся причинами резкого падения численности населения – демографической катастрофы. Это снижает экологическую нагрузку на природу региона, увеличивает объем ресурсов, приходящихся на душу населения. После социальной стабилизации улучшаются условия жизни, и начинается рост населения в новом демографическом цикле.

Демографический блок характеризуется следующим предположением: никаких ограничений на рост численности не накладывать, но если в данном месте возникает недостаток пропитания, то часть людей из этого места переселяется на новое.

В рассматриваемой модели рассматривается только одна социальная группа – крестьяне. Тем не менее, построенная на основе небольшого числа предположений, модель может в определенных условиях достаточно правдоподобно описывать реальную демографическую динамику [10].

Численность каждого поселения определяется следующим образом:

$$N_{i+1} = N_i * r, \quad (2)$$

где коэффициент роста населения  $r$  есть отношение населения последующего года к населению предыдущего года. Коэффициент роста  $r$  зависит от потребления –  $p$ . Когда потребление равно минимальной норме ( $p = 1$ ), население остается постоянным ( $r = 1$ ). Максимальный естественный рост обозначим  $r_m$ , а величину потребления, при которой он достигается –  $p_m$ . По-

лагаем  $r_m = 1,02$ , т. е. максимальное увеличение численности населения составляет 2 % в год. Считаем, что при  $1 < p < p_m$  рост населения линейно зависит от потребления, а при  $p > p_m$  уже не увеличивается ( $r = r_m$ ). При  $p < 1$  зависимость  $r$  от  $p$  берется в форме  $r = p$ , т. е. в случае голода выживает столько людей, сколько имеется продуктов (все люди, не обеспеченные пищей на год, погибают).

Таким образом, коэффициент роста  $r$  вычисляется по следующим формулам:

$$\text{если } p > 1, \quad \text{то } r = a_1 * p + (1 - a_1),$$

$$\text{где } a_1 = (r_m - 1)/(p_m - 1).$$

$$\begin{aligned} \text{При этом если } r > r_m, \quad & \text{то } r = r_m, \\ \text{если же } p < 1, \quad & \text{то } r = p \end{aligned}$$

Конечно, данная модель описывает лишь основной механизм демографического цикла, упуская из виду многие детали, например, существование государства и военной элиты или развитие крупного помещичьего землевладения. Эти факторы учтены в других моделях [10–12] и расчеты по ним показывают, что по сравнению с предлагаемой моделью качественная картина циклов меняется незначительно.

В модели временной отрезок, соответствующий одной временной итерации, исходя из аграрной ориентации был выбран равным одному циклу производства сельскохозяйственной продукции, который в условиях средней полосы России равен одному году.

Каждая временная итерация выглядит следующим образом: сначала с окрестностей, определенных по описанным правилам, собирается урожай. При наличии нескольких альтернативных видов продукции происходит упорядочивание по их размерам: сначала урожай снимается с преобладающего типа сельхозугодий, т. е. с угодий, на которых производится продукция с большей калорийностью, а потом, если остаются «рабочие руки», со следующего типа земель и т. д.

Далее, согласно описанной ранее формуле (2), составляется продовольственный баланс каждого поселения. Если продуктов питания не хватает, то часть населения переходит на новое место жительства. Возможны три вида переселения: вырожденный случай, когда перемещаться некуда (например, кругом вода), мирное переселение, когда свободного места много, и немирное в противном случае. Если при поиске нового места для поселения ничего подходящего не найдено, то в городе закономерно наступает голод, это значит, что численность населения изолированного города, например, острова в море, оазиса в пустыне не может расти до бесконечности [13, 14]. Если в результате поиска были найдены только города (либо окрестности других городов), то с ближайшим найденным городом возникает территориальный конфликт. При возникновении территориального конфликта между двумя городами решающую роль играет численность их населения.

Учитывая примерно одинаковый уровень технологий в период, рассматриваемый в данной работе, победа в большинстве военных конфликтов определялась численным преимуществом.

В ходе расчетов были получены все качественные особенности появления и образования систем поселений. При значениях таких параметров модели, что производимой продукции не хватало для пропитания, наблюдалась сильная миграция населения из начального города, при этом возникало множество конфликтов между поселениями. В результате происходило «размазывание» населения по пространству. Наоборот, при недостатке продовольствия происходило образование устойчивой системы взаимоотношений между поселениями, в которой территориальные конфликты возникали на поздней стадии развития.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Каница С.П.* Общая теория роста человечества: сколько людей жило, живет и будет жить на Земле. М.: Наука, 1999.
2. *Каница С.П.* Очерки теории роста человечества. Демографическая революция и информационное общество. М.: ЗАО ММВБ, 2008.
3. *История и математика: Проблемы периодизации исторических макропроцессов* / под ред. Л.Е. Гринин, А.В. Коротаев, С.Ю. Малков. М.: КомКнига/URSS, 2006.
4. *Назаретян А.П.* Цивилизационные кризисы в контексте Универсальной истории. М.: ПЕР СЭ, 2001.
5. *Коротаев А.В., Малков А.С., Халтурина Д.А.* Долгосрочные макротенденции развития Мир-Системы и возможности их математического моделирования // Синергетика: будущее мира и России. М.: Изд-во ЛКИ, 2008. С. 92-132.
6. *Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С.* Введение в синергетику: учеб. руководство. М.: Наука, 1990.
7. *Гарднер М.* Математические досуги. М.: Мир, 1972.
8. *Дмитриев М.Г., Дубовский С.В., Жукова Г.С., Михайлов А.П., Петров А.П., Малков С.Ю., Степанцов М.Е.* Моделирование социально-политической и экономической динамики. М.: РГСУ, 2004.
9. Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук. Официальный сайт. URL: <http://www.keldysh.ru/>. Загл. с экрана.
10. *Малков А.С.* Математическое моделирование развития аграрных обществ: автореф. дис. ... канд. ф.-м. наук. М., 2005.
11. *Нефедов С.А., Турчин П.В.* Опыт моделирования демографически-структурных циклов. История и математика: Макроисторическая динамика общества и государства. М.: КомКнига, 2006. С. 153-167.
12. *Малков С.Ю., Косе Ю.В., Бакулин В.Н., Сергеев А.В.* Социально-экономическая и демографическая динамика в аграрных обществах // Математическое моделирование. 2002. Т. 14. № 9. С. 103-108.
13. *Коротаев А.В., Малков А.С., Халтурина Д.А.* Законы истории. Математическое моделирование исторических макропроцессов. Демография, экономика, войны. М.: КомКнига, 2005.
14. *Малков С.Ю.* Математическое моделирование исторической динамики: подходы и модели. М.: Наука, 2004.

Поступила в редакцию 26 марта 2009 г.

Hlebnikov V.V. Mathematic modeling of spatial social structures evolution. In the work the review of various mathematical models of spatial social structures evolution is considered and the model of population evolution on an example of Russia of XIII century is realized.

Key words: mathematical modeling; synergetics; cellular automatic machines.